# Геометрия квантованного пространства

Клящицкий Григорий (GK)

## 1 Введение

Квантовая идея сегодня является основным направлением нашего движения в понимании законов мироздания. Макс Планк, выдвинувший идею кванта, одновременно указал, что квантованность энергии неизбежно требует квантованности пространства и времени. В статье «Квантованность пространства-времени» мы убедились в правоте этого утверждения. В этой связи возникает вопрос, как изменяются геометрические представления о пространстве всвязи с идеей квантованности пространства?

## 2 Пространство

### 2.1 Квантованность пространства

Квантованность пространства можно определить следующими положениями:

- ***Пространство не является непрерывным.***
- ***Пространство дискретно и состоит из «отдельных» квантов.***
- ***Квант пространства не может быть разделён на более мелкие порции.***
- ***Кванты пространства неразличимы. То есть не существует критериев, основываясь на которых возможно идентифицировать отдельный квант пространства.***

### 2.2 Материальность пространства

Квантованность пространства тесно связана с его материальностью. То есть пространство не просто вместилище, которое может быть заполнено материей известного типа и через свойства этой материи проявить себя. Пространство как таковое имеет объективные свойства(о), то есть обладает материальностью.

***Простанство – объективно существующая материальная реальность.***

## 3 Геометрия Евклида и свойства пространства

Пространство часто отождествляется с геометрией. Наши геометрические представления были заложены Древними Греками. В геометрии Евклида о пространстве как таковом не упоминается. Считали ли древнегреческие философы что существует некая основополагающая «среда», в которой всё сущее находится? Возможно, что некоторые философы допускали такую идею, но вряд ли её можно считать общепринятой.

Евклидова геометрия строится на Определениях и Аксиомах. Эти положения лежат в основе свойств базовых объектов и их фундаментальных взаимоотношений. В то же время, само построение геометрии основано на свойствах «конкретных» геометрических объектов и не рассматривает пространство как таковое. Несмотря на это, аксиомы и постулаты геометрии неявно определяют более фундаментальные вещи, свойства пространства. Например, пятая аксиома является отражением линейности пространства. Современные представления рассматривают линейность частным случаем, не отражающим реальность вцелом (искривлённость пространства), и пятая Аксиома Евклида считается излишней.

В таком случае возникают два закономерных вопроса:

1. Каковы свойства пространства, которые заложены в аксиоматику Евклидовой геометрии?
2. Насколько принятые в геометрии свойства пространства соответствуют реальности?

Несмотря на важность вопросов, мне не приходилось встречать их рассмотрение, или даже постановку. Я не возьмусь обсуждать эту тему целиком, поскольку она огромна сама по себе и выходит за рамки данной статьи. Но некоторые свойства пространства действительно имеют прямое отношение к обсуждаемому вопросу.

### 3.1 Квантовая геометрия

Первая Аксиома Евклидовой геометрии гласит:

> *Точка есть то, что не имеет частей. (Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν — букв. «Точка есть то, часть чего ничто»)*

В современной интерпритации:

> *Точка – это определенное место в пространстве. Точки описывают позицию, но не имеют размера или формы сами по себе.*

Интересно отметить разницу между Евклидовой Аксиомой и её современной интерпретацией. В оригинале речь не идёт о размере. Напротив, делается утверждение о «неделимости» объекта «точка».

В современном изложении этой же Аксиомы делается явное утверждение об отсутствии размера точки. То есть размер точки бесконечно мал. Отсюда вытекает, что между двумя точками всегда можно поставить иную точку, то есть понятие непрерывности.

Если предположение о квантованности пространства отражает его реальное свойство, то это означает, что первая аксиома геометрии в современной интерпретации не соответствует реальному пространству. Если отказ от пятой аксиомы привёл к появлению альтернативной Не-Евклидовой геометрии, то (как вы догадываетесь) отказ от первой аксиомы (в современной интерпретации) приведёт к созданию квантовой геометрии, геометрии, где первая аксиома будет звучать примерно так:

> ***Точка – это определенное место в пространстве. Точки описывают позицию, и имеют минимально возможный размер. Определить положение в пространстве с точностью, превышающей минимальный размер, невозможно (неделимы, не имеют частей).***

Я не математик, и потому не стоит рассматривать предложенное положение как окончательное. Речь идёт о смысле.

Интересно отметить, что оригинальное определение говорит исключительно о неделимости объекта «точка», не привлекая понятие размер. Это означает, что оригинальная формулировка полностью соответствует квантовой идее пространства. По-сути, Точка в определении Евклида является квантом пространства в современном представлении физиков.

**Пространство и система координат**

В нашем представлении имеется тесная связь между числовой осью и пространством. Эта связь проистекает из Декартовой системы координат, которая «отождествляется» с геометрическим пространством. В основе Декартовой системы лежит числовая ось. Объективными свойствами числовой оси является числовая непрерывность. Для чисел верно утверждение непрерывности, подобное вышеприведённому (между любыми двумя числами имеется иное число). Это явилось причиной того, что определение точки (Евклидово) было изменено, дабы соответствовать числовой оси.

Квантовая идея разрушает указанную связь. Числовая ось, являясь непрерывной, более не отражает физику пространства, и может использоваться как его представление только при определённых ограничениях. В этом заключён важный переход, который неразрывно связан с понятием материальности пространства.

Декартова система координат не является объективной реальностью. Она – продукт разума. Пространство же является материальным (объективной реальностью). В этом заключено фундаментальное различие между этими понятиями, которое проявляется в том числе и в различии числовых осей и пространства.

Напомню, что оригинальное построение Евклида не оперирует числами. Евклид не использует понятие расстояние, а размер (или угол) определяется как часть или кратное данного отрезка (угла) (без указания численных значений). В этом смысле построение Евклида последовательно проводит определение точки и соответствует квантовой идее.

## 3.2 Отрогональность простанства

Аксиоматика Евклида определяет (неявно) ещё одно свойство простанства – ортогональность. В «Определениях» Евклида в отношении углов (10) даётся определение прямого угла:

> *Прямая линия, стоящая на другой прямой линии, создающая смежные углы равными друг другу определяет прямые углы и называется перпендикуляром.*

Четвёртая Аксиома Евклида гласит:

> *Все прямые углы равны между собой.*

Как видим, геометрия Евклида выделяет прямой угол как особый среди всех прочих, и прямому углу придано ключевое значение. Сам по себе этот факт является примечательным. Ведь для прямого угла базовой геометрической фигурой является квадрат. Неспроста квадрат лежит в основе понятия «площадь».
Основополагающим построением геометрии Евклида является треугольник. Именно вокруг него построено большинство теорем геометрии. Казалось бы, если основывать построение на фигуре треугольника, то логично в качестве базиса выбрать треугольник с равными сторонами. В таком случае и определение ключевого угла (равностороннего треугольника) было бы вполне естественным. Но в геометрии Евклида центральную роль играет прямой угол и Евклидова геометрия построена таким образом, что прямоугольный треугольник является ключевым элементом построения.

С таким выбором связана ещё одна «странность». Если мы возьмём квадрат со стороной «а», то такая фигура полностью определена (это необходимое условие базиса площади). Аналогичное утверждение можно сделать относительно треугольника с равными сторонами. Если же мы рассматриваем прямоугольный треугольник с гипотенузой «а», то таких треугольников получаем множество?
На деле в вышепрведённом утверждении содержится очевидная ошибка, которую принято не замечать. Это утверждение об однозначности фигуры с четырьмя равными сторонами. Дело в том, что такой четырёхугольник (в отличие от треугольника) не является «жестким». Действительно можно построить множество четырёхугольников со стороной «а». Такие фигуры образуют параллелограммы. Квадрат, как очевидно, является лишь частным случаем подобного множества фигур.
Более того, ситуация становится совершенно странной, когда вы осознаёте, что четырехугольная фигура со сторонорй «а» не только не определяет форму, но и не задаёт площадь. Площадь параллелограммов со стороной «а» меняется от 0 до $a^2$.

Таким образом, для однозначности определения фигуры (и площади) с четырьмя сторонами необходимо задать ещё один независимый параметр. Им может быть длинна гипотенузы (например), либо площадь фигуры, или угол.

Как мы указывали выше, наши геометрические представления строятся на представлении ортогональности пространства, которое заложено в Определения и Аксиоматику Евклида. За 2.5 тысячи лет мы настолько привыкли к идее ортогональности, что перестаём отдавать себе отчёт, что сама идея является лишь Аксиомой. Нам кажется ортогональность пространства вполне естественной и, как следствие, прямой угол является основой геометрических решений, используемых на практике. Но подобная ситуация имела место и в отношении линейности пространства. Однако пространство (несмотря на наше желание) оказалось нелинейным. Может ли быть, что оно также окажется неортогональным? Давайте посмотрим.

### 3.2.1 «Естественный» угол пространства

Итак, мы рассматриваем свойства пространства. Нас не интересуют вопросы практического использования или практического удобства. Вопрос, который мы себе зададим, звучит следующим образом:

*Если пространство имеет некий угол как свойство внутреннего состояния, то каков он может быть?*

Мы исходим из квантовой гипотезы пространства. Условно квант пространства можно представить как сферу диаметром $\zeta$, равным размеру кванта. Как нам кажется, математическое доказательство Перельмана существования четырёхмерной сферы является очень важным шагом на пути развития квантовой концепции.

Для простоты рассмотрим двумерный срез пространства. (Рис 1)

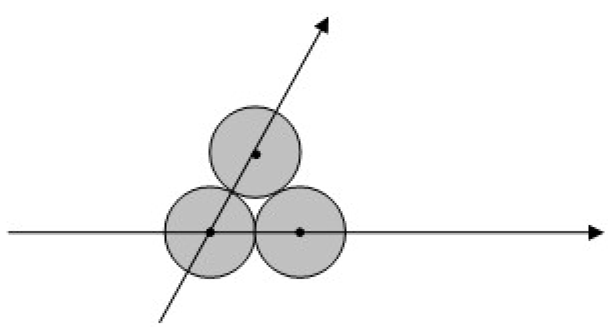

Рис.1. Расположение квантов в пространстве (двумерный срез)

Очевидно, что кванты пространства расположены плотно друг к другу. Тогда соседние кванты образуют равностороннюю фигуру. На двумерном срезе (Рис.1) это будет равносторонний треугольник. Оси, соединяющие «центры» квантов, пересекаются под углом $60^{o}$.

Если рассматривать трехмерное пространство (Рис 2), то кванты образуют треугольную пирамиду с равными сторонами.

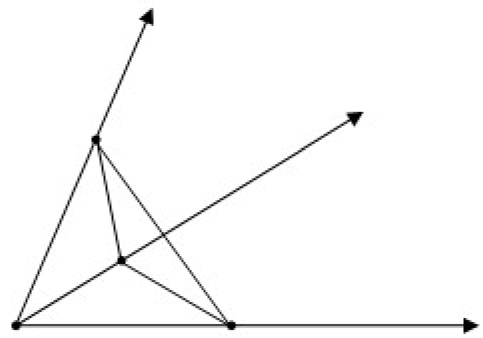

Рис.2. Расположение квантов в пространстве (трёхмерный срез)

В каждой плоскости «центры» квантов образуют равносторонние треугольники.
Как выглядит базовая фигура в четырёхмерном Пространстве (пространстве-времени), нарисовать не берусь. Более того, доказательство существования в четырёхмерном Пространстве «сферы» (теорема Ферма-Перельмана) заняло почти сто лет. Возможно ли доказать существование четырёхмерной равносторонней «пирамиды» – это вопрос...
Тем не менее, рассмотрение показывает, что характерный угол квантованного пространства является не ортогональный угол (90$^{o}$), а равносторонний угол – 60$^{o}$.

**Геометрия равностороннего треугольника**

Если взять равносторонний треугольник за базу, то на плоскости получим шестиугольник (вместо привычного квадрата) (Рис 3).

1. Шестиугольники образуют «непрерывную» плоскость в том смысле, что покрывают поверхность целиком, не оставляя пробелов.

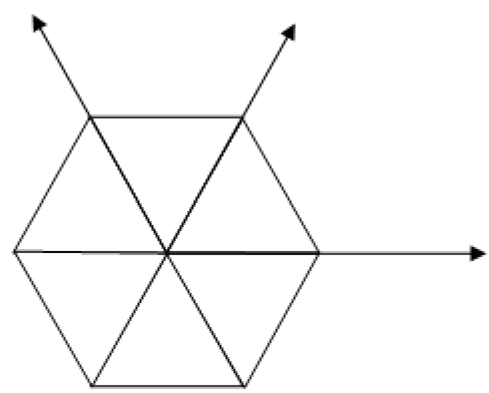

Рис 3. Базис равностороннего треугольника (плоскость)

2. Шестиугольная структура «легче» вписывается в другие базовые геометрические фигуры, например в окружность. Этот момент играет первостепенную роль, поскольку является основой вычисления площадей.

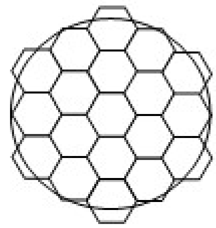

Рис 4. Круг, вписанный в шестиугольную структуру.

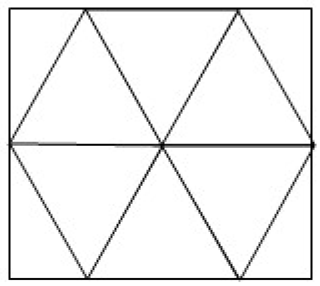

Рис 5.Прямоугольник, описывающий шестиугольную структуру.

3. Сотовая структура естественным образом вписывается в радиально-кольцевую схему, характерную для крупных городов (деления участков).

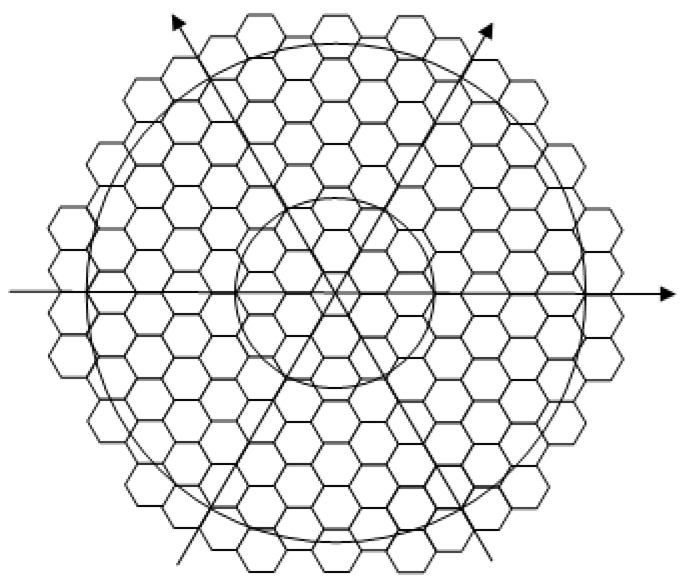

Рис 6. Радиально-кольцевая структура

4. Важный момент состоит в отсутствии явного центра, или в существовании множественных центров. Фактически любая ячейка может быть выбрана в качестве центра (Рис 7).

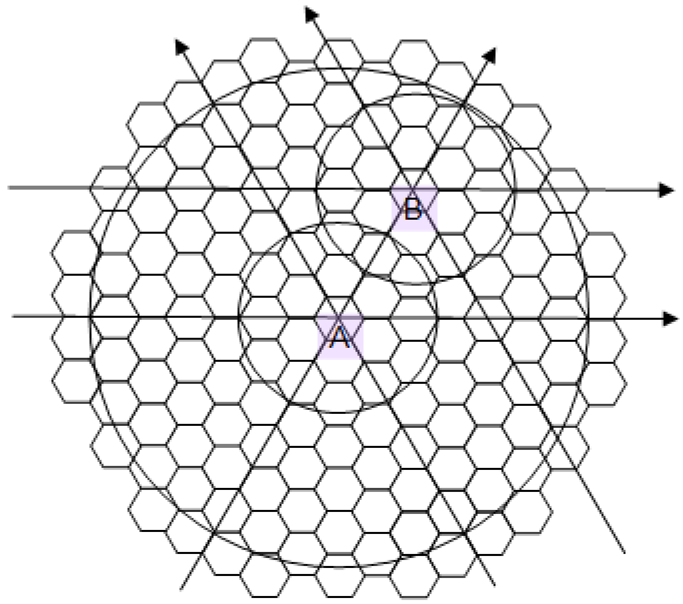


Рис 7. Равнозначность центров

### 3.3 Число осей пространства

Системы координат тесно связаны с размерностью пространства.

Ортогональная система соответствует размерности пространства. Число ортогональных осей равно числу независимых парамеров описания (число полуосей равно удвоенному числу параметров описания):

$$\mathbf{N^{\perp}_{1/2} = 2*n} \qquad (1.1)$$

В случае принятия равносторонней системы (60º), число осей существенно возрастает. Фактически, число полуосей равносторонней системы описывается формулой факториала:

$$\mathbf{N^{\Delta}_{1/2} = (n+1)!} \qquad (1.2)$$

где $N_{1/2}$ – число полуосей;

n – размерность пространства.

Примечательно, что факториал является основной комбинаторики и теории вероятности. В физике эта функция используется в Статистической физике, описывающей поведение ансамбля однотипных элементов.

Хотя Декартова система является наиболее часто используемой, она является не единственно возможной, и не всегда предпочтительной. Нередко используется сферическая система координат. Она более удобна для описания вращательных движений, что является не менее распространённым типом движение, чем линейные.

Интересно отметить, что для времени мы пользуемся не линейной, а сферической (круговой) интерпритацией. При этом само построение временной системы соответствует факториальной зависимости $n_{/2}!$:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| n: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| n!: | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 |
| $n_{/2}!$: | 1 | 2 | 6 | 12 | 60 | 360 |

Знак «$n_{/2}!$» означает, что при умножении на 4 (2*2) мы не используем повторяющуюся 2.
Думаю, что будет весьма интересно проанализировать, в каком соответствии находится сферическая и равносторонняя линейная системы. Создаётся ощущение, что они лучше соответствуют друг другу (легче преобразуются одна в другую).

## 4 Заключение

В этой статье мы лишь затронули некоторые следствия квантованности пространства для геометрических представлений. Вопрос этот очевидно требует дальнейшего и более серьёзного рассмотрения. Тем не менее, в статье нам удалось поставить вопрос о соотвествии современных геометрических представлений пространственной материи.
Если принять, что пространство не ортогонально, то приведёт ли это к практическим изменениям и пересмотру наших методов геометрии? Не уверен. Нелинейность простанства встречается в повседневной практике в определённых случаях, и потому «нелинейность» не изменила наш подход в подавляющем большинстве случаев. Аналогично, отказ от ортогональности простанства (если идея окажется верна), мало скажется на повседневной практике. Просто наше представление о мире, в котором мы живём, претерпит некоторое изменение.

2023, Сентябрь – 2024, Апрель

### *Приложение: список статей по квантовой тематике*

«Квантованность пространства-времени»
«Материальность пространства-времени»
«Свойства квантов пространства-времени»
«Пространство и Время»
«Ньютонова и не-Ньютонова материя»
«Геометрия квантованного пространства»